Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications

RM
2022-2023

1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

1.1 Définitions

Définition 1 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier (conjuguée) de f l'application notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} f(x)dx \text{ et } \tilde{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi} f(x)dx.$$

Remarque 2 : Il existe des variantes dans la définition de la transformation de Fourier. On peut par exemple avoir

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx \text{ ou } \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} dx.$$

Les propriétés sont les même d'une définition à l'autre à une constante près.

Remarque 3 : On peut étendre cette définition à $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx$$

où $x.\xi$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

i) $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est uniformément continue.

ii) $\hat{f}$ est uniformément bornée et on a

$$\|f\|_u = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 = \mathcal{F}(|f|)(0)$$

iii) $\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$(théorème de Riemann-Lebesgue).

iv) L'application $\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}(f)$ est une application linéaire.

Remarque 5 : Autrement dit, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $(L^1(\mathbb{R}), \|.\|_1)$ dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|.\|_u)$. De plus, elle n'est pas surjective et $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Exemples 6 : Pour $a > 0$: *i)* $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]})(\xi) = \dfrac{\sin \pi a \xi}{\pi \xi}$.

ii) $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$.

iii) $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2\xi^2}{a}\right)$.

iv) $\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|}$.

1.2 Convolution

Définition 7 : On dit que f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Si f et g sont convolables, on définit alors le produit de convolution(ou la convolée) de f et g par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Propriétés 8 : On a $f * g = g * f$ et si f est convolable avec g et h, alors f est convolable avec $\alpha g + \beta h$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$$

Théorème 9 : Soit f, g, h dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors

i) $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

iii) si $f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f_n * g_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f * g$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 10 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

i) Si $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et on a $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on a $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. De plus, $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 11 : L'espace $(L^1(\mathbb{R}^n), +, ., *)$ est une algèbre commutative sans élément neutre.

Définition 12 : Soit $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions positives et intégrables sur $\mathbb{R}^n$. On dit que la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ est une unité approchée ou approximation de l'unité si

i) $\int_{RR^n} \varphi_n(x)dx = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Pour tout réel strictement positif a, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\{\|x\| > a\}} \varphi_n(x)dx = 0.$$

L'unité approchée $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est dite compacte si toutes les fonctions φ_n s'annulent en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 13 : On définit pour $n \in \mathbb{N}$ la suite de réels $a_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$ et la suite suivante

$$p_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} (1-t^2)^n/a_n \text{ si } |t|<1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

Alors (p_n) est une approximation de l'unité.

Théorème 14 : Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité. Alors, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on a $\varphi_n * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_n * f$ converge uniformément vers f.

Théorème 15 : Soit f, g dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors :
   $i)$ $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.
   $ii)$ Si de plus $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et on a aussi $\mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}$.

1.3 Dérivabilité et inversion

Théorème 16 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si f est continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^m$ par morceaux où $m \in \mathbb{N}^*$ et telle que les dérivées $f^{(k)}$ jusqu'à l'ordre m inclus appartient à $L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour tout $1 \leq k \leq m$, on a

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (2i\pi\xi)^k\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Corollaire 17 : Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Si f est de classe $\mathcal{C}^m$ par morceaux, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|}{(2\pi)^k|\xi|^k}.$$

Autrement dit, plus f est dérivable avec des dérivées intégrables, plus $\hat{f}$ tend vite vers 0 quand $|\xi|$ tend vers l'infini.

Théorème (d'inversion de Fourier) 18 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x) \text{ et } \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x)$$

Théorème 19 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} = 0$, alors $f = 0$ p.p. En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 20 : On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant les deux propriétés suivantes
   $i)$ f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $ii)$ f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. Autrement dit pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0.$$

Exemple 21 : La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 22 : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel stable par dérivation et par multiplication par les fonctions polynômiales.

Définition 23 : On dit que la suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers φ lorsque n tend vers $+\infty$, si pour tout $(m,p) \in \mathbb{N}^2$, la suite de fonctions $(x \mapsto x^m\varphi^{(p)}(x))_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto x^m\varphi^{(p)}(x)$.

Théorème 24 : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Théorème 25 : La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et a pour automorphisme réciproque $\tilde{\mathcal{F}}$.

Théorème 26 : Soient f, g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors
   $i)$ $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
   $ii)$ $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.

Développement (Théorème de Plancherel) 27 : Avec la convention de transformée de Fourier $e^{-ix\xi}$, L'application

$$\mathcal{P} : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{array}$$

possède un unique prolongement continue à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et ce prolongement est un isomorphisme isométrique.

Dev 1

Remarque 28 : Dans beaucoup d'autre référence, on montre ce prolongement en partant de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Cela se passe bien dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'après le théorème 24.

Remarque 29 : Par abus de notation, on note encore $\mathcal{F}(f)$ ce prolongement qui définie alors la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Il faut donc faire attention à distinguer la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$, mais qui coïncident sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 30 : Si $(f,g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.
Si f, g dans $L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.

Théorème 31 : On a l'analogue du théorème 16 pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ avec les hypothèses qui conviennent, c'est-à-dire que f' est dans $L^2(\mathbb{R})$, et ses dérivées sont de carrées intégrables.

3 Application de la transformée de Fourier.

3.1 En probabilité.

On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé à valeur dans $\mathbb{R}$.
Définition 32 : On appelle fonction caractéristique de X la transformée de Fourrier de sa loi P_X. Elle est noté φ_X et on a donc par théorème de transfert

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{iXt}]$$

Proposition 33 : On a $\varphi_X(0) = 1$ et pour tout t de $\mathbb{R}$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$ et $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_x(t)}$.

Remarque 34 : Il résulte de la propriété d'injectivité de la transformée de Fourier que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ caractérise entièrement la loi de cette variable aléatoire (d'où son nom).

Proposition 35 : Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. La fonction caractéristique de leur somme est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t).$$

Théorème (de Lévy) 36 : Soit X,$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles, alors on a équivalence entre :
$i)$ X_n converge en loi vers X.
$ii)$ La suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ_X.

Développement (Théorème Centrale Limite) 37 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire réelle indépendantes et identiquement distribuées admettant des moments d'ordre 2. On pose $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$. En posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,on a alors

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Dev 2

3.2 Formule de Poisson

Théorème (Formule sommatoire de Poisson) 38 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(x) = O\left(1/x^2\right)$ et $f'(x) = O\left(1/x^2\right)$ lorsque $|x| \to +\infty$. Alors on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)e^{2i\pi nx}.$$

Application 39 : On déduit de la formule sommatoire de poisson que

$$\forall s > 0, \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi k^2/s}.$$

Références :

- Mesures, intégrations, convolution et transformée de fourier des fonctions - El Haj Laamri
- Analyse pour l'agrégation - Hervé Queffélec, Claude Zuily
- Analyse - Xavier Gourdon
- L'oral à l'agrégation de mathématiques - Lucas Isenmann, Timothée Pecatte
- Probabilités 2 - Jean-Yves Ouvrad